正規分布の密度関数は $x = \mu \pm \sigma$ で変曲点になる話。

準備段階。$f(x)$ を x の多項式として

$$\{e^{f(x)}\}' = f'(x)e^{f(x)}$$

だから，

$$\begin{aligned}\{e^{f(x)}\}'' &= \{f'(x)\,e^{f(x)}\}' \\ &= f''(x)\,e^{f(x)} + f'(x)\{e^{f(x)}\}' \\ &= f''(x)\,e^{f(x)} + f'(x)\,f'(x)\,e^{f(x)} \\ &= \{f''(x) + \{f'(x)\}^2\}\,e^{f(x)}\end{aligned}$$

となる。

さて，正規分布の密度関数

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

の指数部分を $h(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{x-\mu}{\sigma^2} \\ h''(x) &= -\frac{1}{\sigma^2}\end{aligned}$$

となるから，密度関数を 2 階微分すると

$$g''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

いま $x = \mu \pm \sigma$ とすると，

$$-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}$$

の部分が 0 になるので，$g''(\mu \pm \sigma) = 0$ である。